
FUNCIONES III
Prof.: Carlos Fermín.

ESTUDIO DE FUNCIONES: dominio, rango y gráfico.

FUNCIÓN LINEAL: son las rectas horizontales y diagonales.

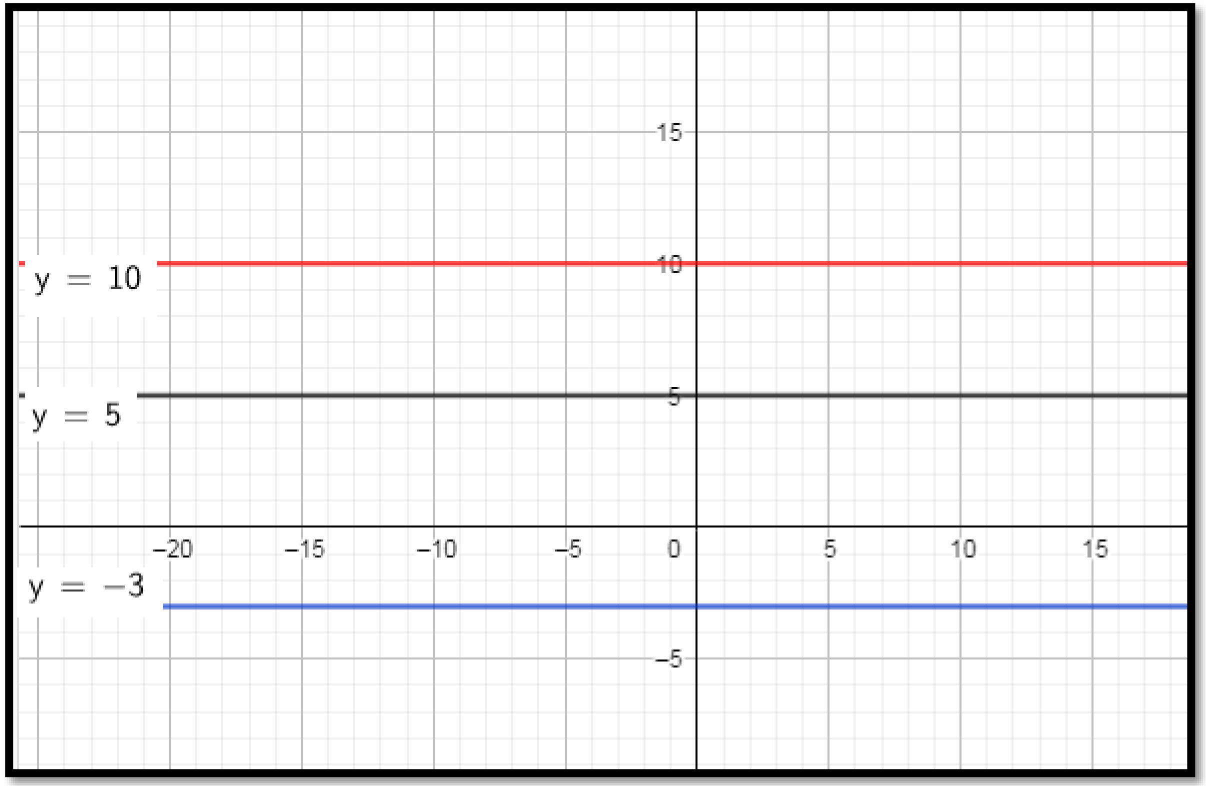
- **Las rectas horizontales** son denominadas función constante y son de la forma y=K donde k es cualquier número perteneciente al conjunto Real.

Ejemplo:

Características:

Dominio: R

Rango=K



- **Las rectas diagonales**: son de la forma Ax+By+C=0, donde A,B y C son números reales con $A, B \neq 0$

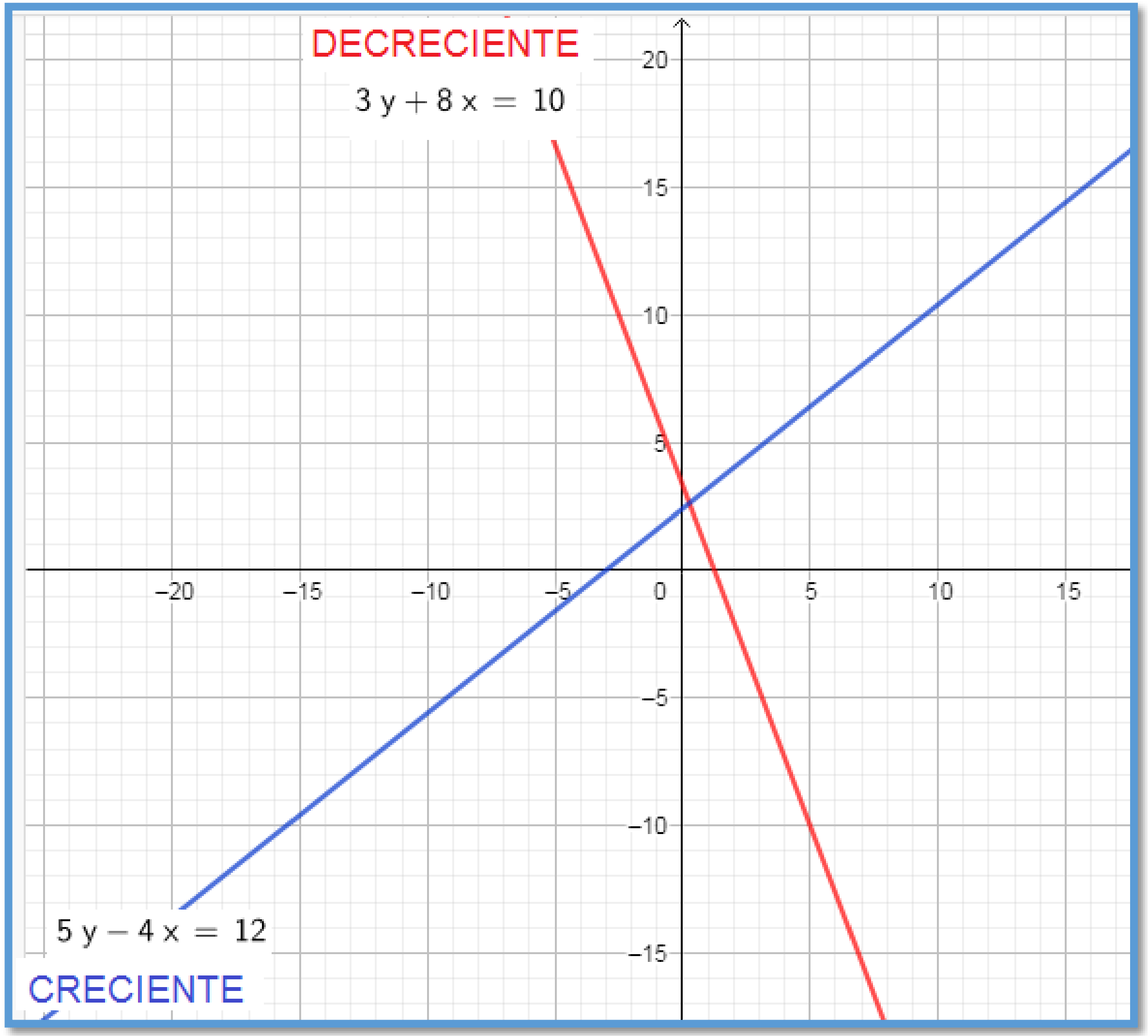
Ejemplo:

Características:

Dominio= R

Rango= R

Biyectivas.



Ecuaciones de la recta:

- **Ecuación general:** se expresa la ecuación iguala a cero con denominadores igual a uno.

$$Ax + By + C = 0 \qquad 3x + 4y - 12 = 0$$

- **Ecuación reducida:** se despeja "y".

$$y = mx + b \qquad y = \frac{-3x}{4} + \frac{12}{4} \qquad y = -\frac{3x}{4} + 3$$

- **Ecuación canónica o simétrica:** se iguala la ecuación al termino independiente el cual debe ser uno, de no pasar esto se divide entre el termino independiente cada termino de la ecuación.

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \qquad \frac{-3x}{12} + \frac{4y}{12} = \frac{12}{12} \qquad \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$$

Cálculo de la ecuación de la recta

- Dados dos puntos de la recta.

1. Se calcula la pendiente (m) su formula es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2. Se sustituye la pendiente y un punto en la formula de la ecuación $y = m(x - x_0) + y_0$
3. Se opera y de ser posible se simplifica.

EJEMPLO:

Dados los puntos A(2 , 7) y B(4 , 3). Hallar la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{2 - 4} = \frac{4}{-2} = -2 \quad m = -2$$

Se toma cualquiera de los puntos dados [en este caso A(2 , 7)]

y la pendiente m=-2

Sustituimos en la formula: $y = m(x - x_0) + y_0$

$$y = -2(x - 2) + 7$$

$$y = -2x + 4 + 7$$

$$\boldsymbol{y = -2x + 11}$$

$$\mathrm{B}(4\,,3)$$

$$y = -2(x - 4) + 3$$

$$y = -2x + 8 + 3$$

$$\boldsymbol{y = -2x + 11}$$

Dado un punto y la pendiente de la recta

1. Se sustituye la pendiente y el punto en la formula de la ecuación

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

2. Se opera y de ser posible se simplifica.

EJEMPLO: Dado el punto A(2 , 7) y m=5. Hallar la ecuación de la recta.

Se toma el punto dados [en este caso A(2 , 7)] y la pendiente m=5

Sustituimos en la formula: $y = m(x - x_0) + y_0$

$$y = 5(x - 2) + 7$$

$$y = 5x - 10 + 7$$

$$\boldsymbol{y = 5x - 3}$$

NOTA: es de resaltar que dada la ecuación de la recta y solicitada su pendiente; bastara con despejar “y” y tomar el coeficiente de “X”.

EJEMPLO: Buscar la pendiente de la recta dada su ecuación.

$$5x - 3y = 17$$

$$-3y = -5x + 17$$

$$3y = 5x - 17$$

$$y = \frac{5x - 17}{3} \qquad y = \frac{5x}{3} - \frac{17}{3}$$

$$m = \frac{5}{3}$$

Gráfica de la recta.

1. Solo se necesitan dos puntos pertenecientes a ella.
2. Si la recta es diagonal con término independiente distinto de cero, se recomienda calcular los puntos de corte, para luego unirlos y realizar las prolongaciones.

Para calcular los puntos de corte bastara con hacer $x=0$ para el corte en el eje “y”; y para el corte en el eje “x” se sustituye por $y=0$

EJEMPLO: Dada la ecuación de la recta $y = 4x + 8$ encontrar los puntos de corte con los ejes.

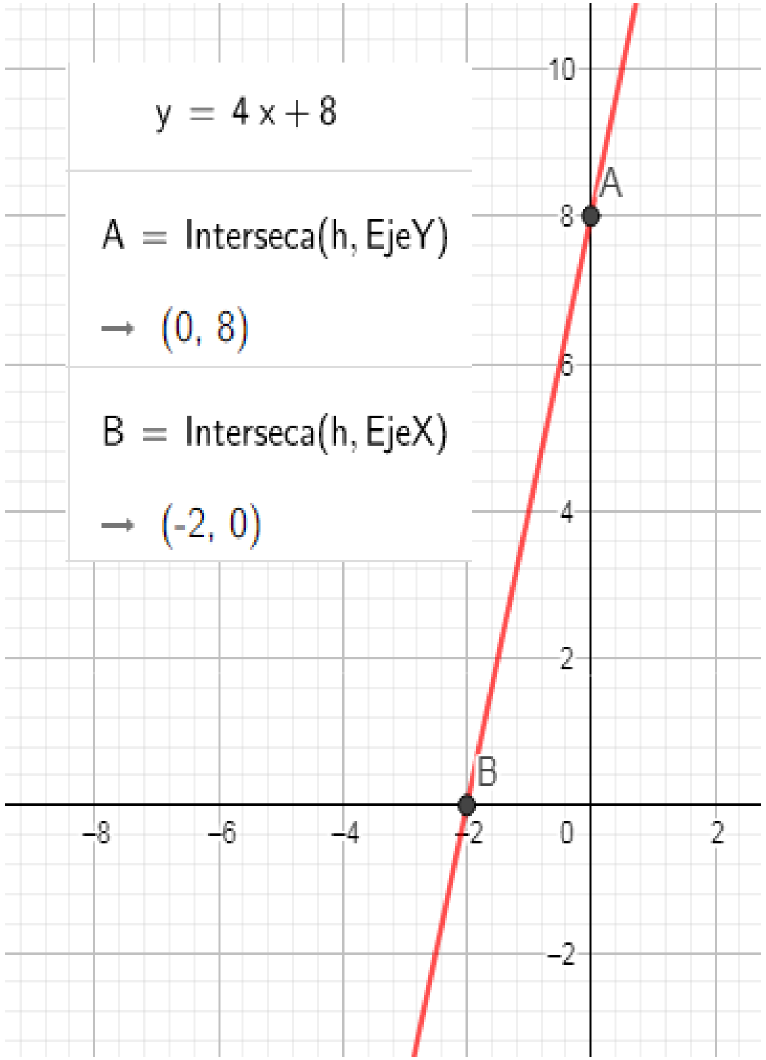
Si x=0 sustituimos en la ecuación obteniendo:

$$y = 4.(0) + 8$$
$$y = 0 + 8$$
$$y = 8$$
$$A(0\,,8)$$

Si Y=0 sustituimos en la ecuación obteniendo:

$$0 = 4x + 8$$
$$-8 + 0 = 4x \qquad 4x = -8$$
$$x = -\frac{8}{4} \qquad x = -2$$

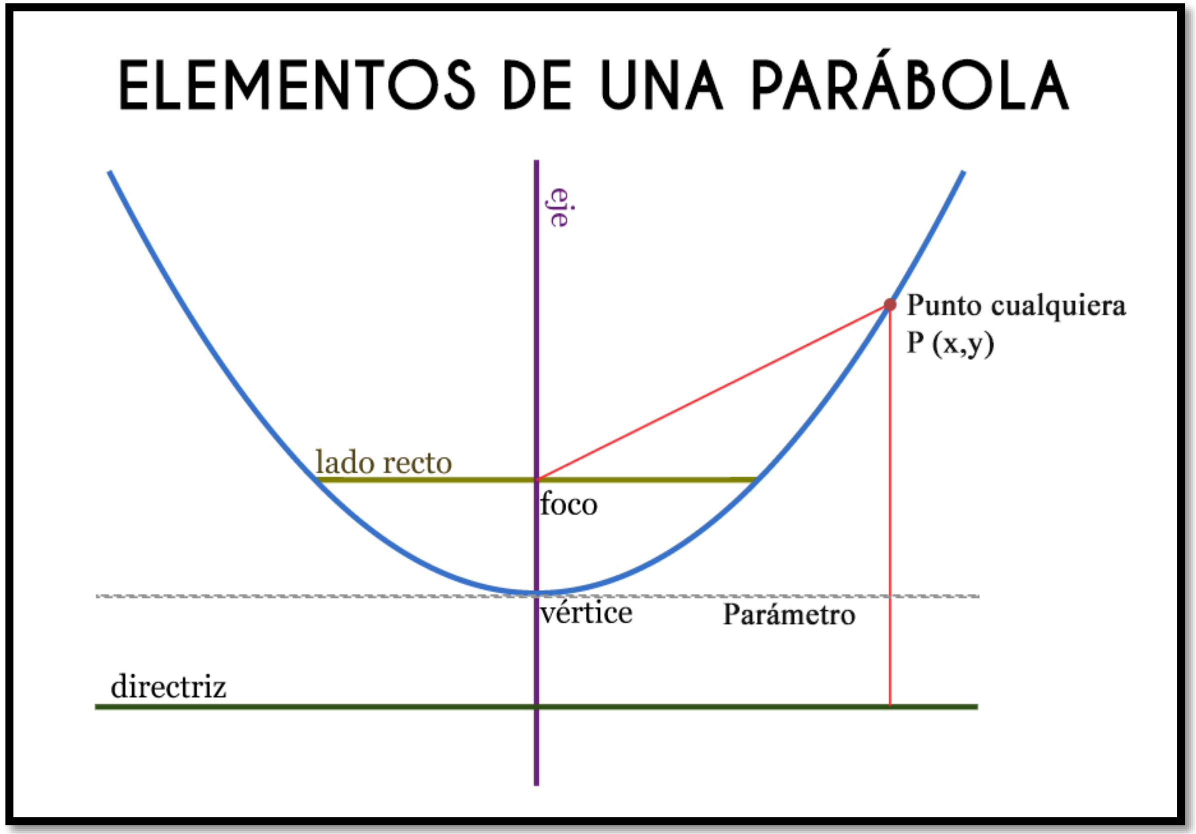
$$B(-2\,,0)$$

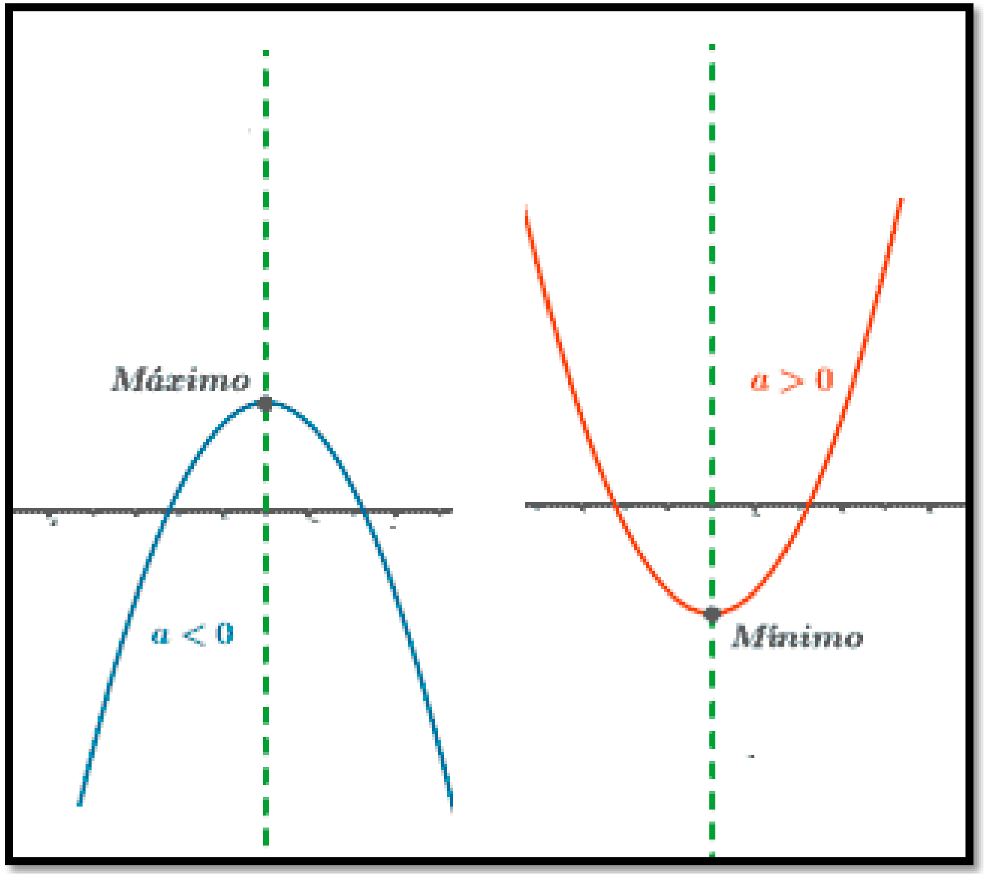


Función cuadrática. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Es una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo, donde

$$a, b, c \in \mathcal{R} \quad y \quad a \neq 0$$





Características de la parábola

1. Su dominio abarca a todos los números reales $Dom: \mathcal{R}$
2. El rango depende de: $\text{Rango} = \begin{cases} [v_y, +\infty) & si \quad a > 0 \\ (-\infty, v_y] & si \quad a < 0 \end{cases}$
3. No es inyectiva.
4. Las coordenadas del vértice, sabiendo que $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, el vértice es:

$$V(v_x, v_y) \quad donde: \begin{cases} v_x = \dfrac{-b}{2a} \\ v_y = \dfrac{(4ac) - b^2}{4a} \\ se\ puede\ buscar\ \ v_y = f(v_x) \end{cases}$$

Gráfica de la función cuadrática.

1. Se buscan los puntos de corte.
2. Se encuentran las coordenadas del vértice.
3. Se unen los puntos según la forma de la parábola.

Ejemplo: Hacer el estudio de la parábola: $f(x) = x^2 + 2x - 8$

- Se buscan los puntos de corte.

Con el eje "y" . ¿Qué pasa si x=0?

$$Sustituimos\ en\ \ la\ ecuación\ \ f(0) = 0^2 + 2(0) - 8$$

$$f(0) = -8$$

$$es\ decir\ si\ x = 0\ y = -8\ tenemos\ el\ punto\ A(0, -8)$$

Con el eje “x” . ¿Qué pasa si y=0?

$$Sustituimos\ en\ \ la\ ecuación \qquad 0 = x^2 + 2x - 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$(x + 4) = 0 \qquad (x - 2) = 0$$

$$x = -4 \qquad x = 2$$

$$es\ decir\ si\ y = 0 \quad x = -4 \quad tenemos\ el\ punto\ B(-4\ , 0)$$

$$es\ decir\ si\ y = 0 \quad x = 2 \quad tenemos\ el\ punto\ C(2\ , 0)$$

Cálculo del vértice.

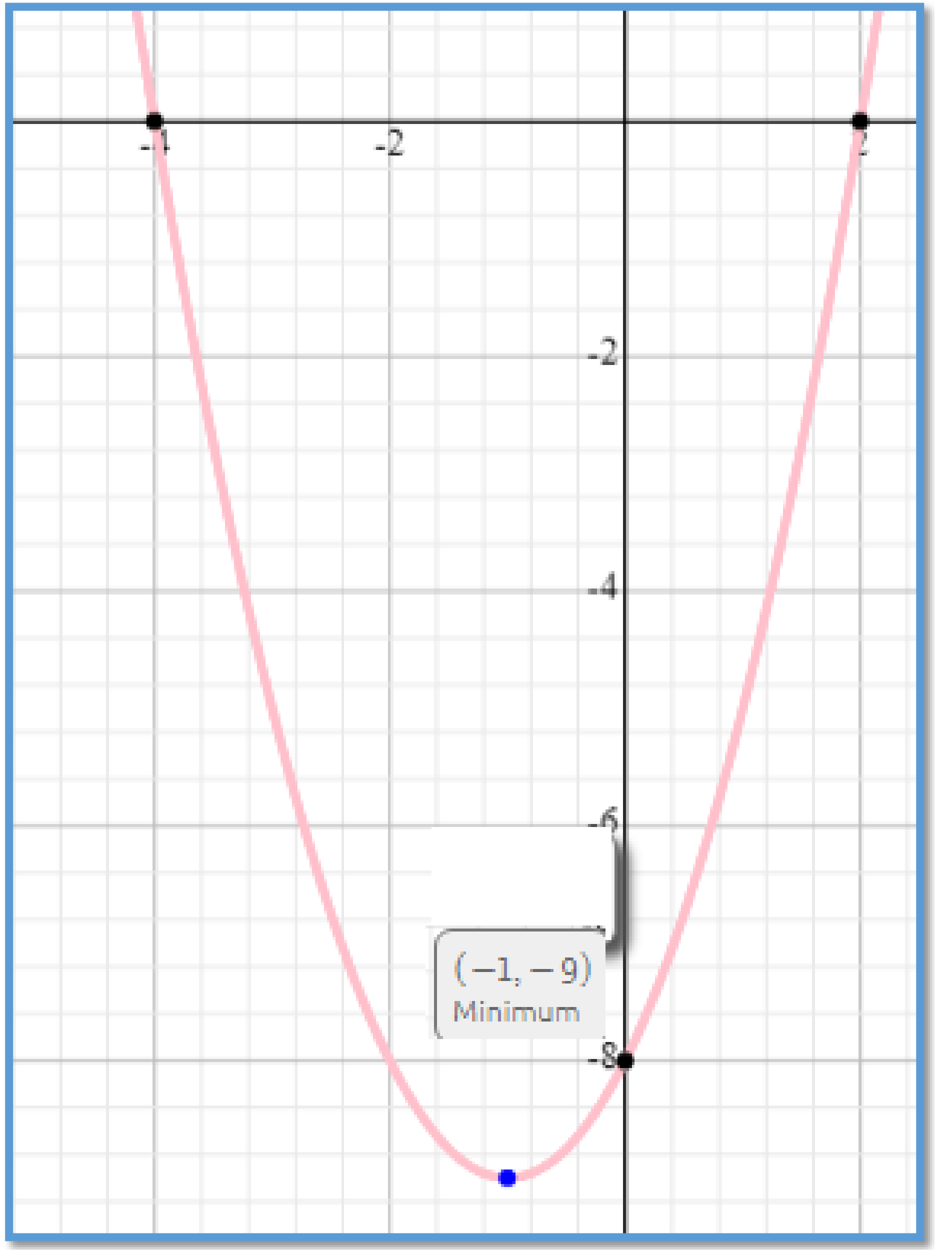
$$f(x) = x^2 + 2x - 8 \ \ , entoces, determinamos\ que\ \ a = 1, b = 2, c = -8$$

$$V(v_x\,, v_y) \ \ donde: \begin{cases} v_x = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{2}{2.1} = -1 \\ v_y = \dfrac{(4ac) - b^2}{4a} = \dfrac{(4.1.-8) - 2^2}{4.1} = \dfrac{-32 - 4}{4} = -9 \\ v_y = f(v_x) = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9 \end{cases}$$

$$V(v_x\,, v_y) = V(-1\,, -9)$$

Se tiene que luego de los cálculos realizados se puede determinar:

La gráfica.



$Dom: \mathcal{R}$

$[v_y, +\infty) \quad si \quad a > 0$

$en \ efecto \ el \ rango \ es [-9, +\infty)$

$ya \ que \quad 1 > 0$