Guía N° II
Relaciones y Funciones Reales de una Variable Real

José Luis Vásquez[†*], Larry Mendoza[1], Remigio Medrano[2] y Williams Castro[**]

[*,**,1,2]Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre"
Vicerrectorado "Luis Caballero Mejías"
Departamento de Ciencias Básicas
Sección de Matemática

Parte 1

1.1.- Graficar los siguientes puntos, en el plano Cartesiano:

(*i*) $(2,\,4)$ (*ii*) $(2,\,0)$ (*iii*) $(-1,\,0)$ (*iv*) $(4,\,2)$ (*v*) $(0,\,3)$

(*vi*) $(0,\,-2)$ (*vii*) $(-1,\,\sqrt{2})$ (*viii*) $(\pi,\,\sqrt{3})$ (*ix*) $(2,\,-1)$ (*x*) $(-2,\,-5)$

(*xi*) $(\sqrt{3},\,-\sqrt{2})$ (*xii*) $(2\pi,\,-3)$

1.2.- Dados los conjuntos: $A = \{\text{Luis}, \text{José}, \text{Pedro}\}$, $B = \{\text{Ana}, \text{Maria}\}$, hallar:

(*i*) $A \times B$ (*ii*) $B \times A$ (*iii*) $A \times A$ (*iv*) $B \times B$

1.3.- Dados los conjuntos: $A = \{a,\, e,\, i,\, o,\, u\}$; $B = \{1,\, 2,\, 3\}$ hallar:

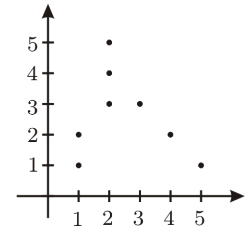
(*i*) $A \times B$ (*ii*) $B \times A$ (*iii*) $A \times A$ (*iv*) $B \times B$

[*] José Luis Vásquez Rivas (1945 – 2012). Nació el 31 de diciembre en la Guaira (actual estado Vargas) y Falleció 9 de septiembre en Caracas. El Lic. José Luis Vásquez fue Profesor Asociado de nuestra casa de Estudio, fue caracterizado, por sus majestuosas clases magistrales.

[**] Profesor Agregado Jubilado de nuestra casa de Estudio.

1.4.- Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; y $\mathcal{R}$ es la relación de A sobre si mismo dado por el gráfico Cartesiano de la Figura 1; decir si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones:

(i)	$1\mathcal{R}2$;	(ii)	$1\mathcal{R}3$	(iii)	$2\mathcal{R}1$	(iv)	$3\mathcal{R}1$
(v)	$4\mathcal{R}2$;	(vi)	$5\mathcal{R}5$	(vii)	$5\mathcal{R}1$	$(viii)$	$5\mathcal{R}3$
(ix)	$2\mathcal{R}4$;	(x)	$1\mathcal{R}1$	(xi)	$3\mathcal{R}3$	(xii)	$4\mathcal{R}1$



1.5.- Escribir $\mathbb{R}$, como un conjunto de pares ordenados.

1.6 .- Las Figuras 2, 3, y 4 muestran respectivamente un gráfico Cartesiano de las relaciones R, S y T:

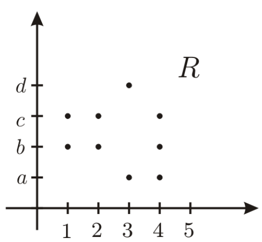


Figura 2

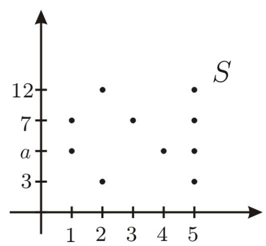


Figura 3

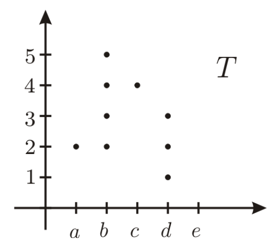


Figura 4

(i) Hallar los elementos R relacionados con el 1 y el 4.

(ii) Hallar los elementos S relacionados con el 2 y el 5.

(iii) Hallar los elementos T relacionados con el b y d.

(iv) Escribir R, S y T, como conjuntos de pares ordenados.

(v) Hacer un diagrama sagital de S y T.

1.7 .- Si $\mathcal{R}$ define la relación "*menor estricto que*"$(<)$; del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ sobre el conjunto $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; escribir $\mathcal{R}$, como un conjunto de pares ordenados, hacer un diagrama sagital y cartesiano de $\mathcal{R}$. Hallar el dominio y el rango de la relación $\mathcal{R}$.

1.8.- Si $\mathcal{R}$ es la relación definida como $x\mathcal{R}y$, si y solo si, x divide a y, la cual trabaja de $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ sobre $B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$. Escribir $\mathcal{R}$ como un conjunto de pares ordenados; hacer un diagrama sagital y Cartesiano de $\mathcal{R}$. Hallar el dominio y el rango de la relación.

1.9.- Dado el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y la relación $\mathcal{R}$ de $\mathbb{N}$ sobre si mismo, definida como $a\mathcal{R}b$, si y solo si $a + 2b = 18$. Hallar $\mathcal{R}$ como un conjunto de pares ordenados, hacer un diagrama sagital y Cartesiano de la relación y conseguir el dominio y el rango de la misma.

1.10.- Dadas las siguientes relaciones, de $A=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$, sobre si mismo, decir cuales son funciones y cuales no; a las que son funciones hallar su dominio y rango.

(i) $R=\{(1,\,1),\,(1,\,2),\,(2,\,3),\,(4,5),\,(5,\,6),\,(6,\,6)\}$ (ii) $S=\{(1,\,2),\,(2,\,3),\,(3,\,4),\,(4,5),\,(2,\,4)\}$

(iii) $T=\{(1,\,2),\,(2,\,3),\,(3,\,4),\,(4,5),\,(5,\,5),\,(6,\,5)\}$ (iv) $W=\{(2,\,1),\,(2,\,2),\,(3,\,1),\,(4,2),\,(3,\,3)\}$

1.11 .- Si la función f, esta dada por el conjunto de pares ordenados:

$$f=\Big\{(-1,\,3),\,(0,\,\sqrt{2}),\,(1,\,3),\,(\tfrac{3}{21},\,-\tfrac{2}{3}),\,(3,\,5)\Big\}.$$

Hallar $f(-1)$; $f(0)$; $f(3)$; $f(\frac{3}{21})$

1.12.- Determinar si las siguientes parejas de números reales, son o no funciones:

(i) $\{(x,x+2)/x\in\mathbb{R}\}$ (ii) $\{(x+2,x)/x\in\mathbb{R}\}$ (iii) $\big\{(x,x^2+1)/x\in\mathbb{R}\big\}$

(iv) $\big\{(x^2+1,x)/x\in\mathbb{R}\big\}$

1.13.- Si $f(x)=x^3-2x+3$, Hallar

(i) $f(2)$; (ii) $f(-\frac{2}{3})$; (iii) $f(\frac{1}{2})$ (iv) $f(\sqrt{2})$ (v) $f(-\sqrt{3})$

(vi) $f(\pi)$ (vii) $f(x+1)$ $(viii)$ $f(x-2)$ (ix) $f(\frac{a}{3})$ (x) $f(x+h)$

(xi) $f(x-h)$ (xii) $f(\frac{1}{x})$ $(xiii)$ $f(-x)$ (xiv) $f(\sqrt{a})$ (xv) $f(\sqrt[3]{a})$

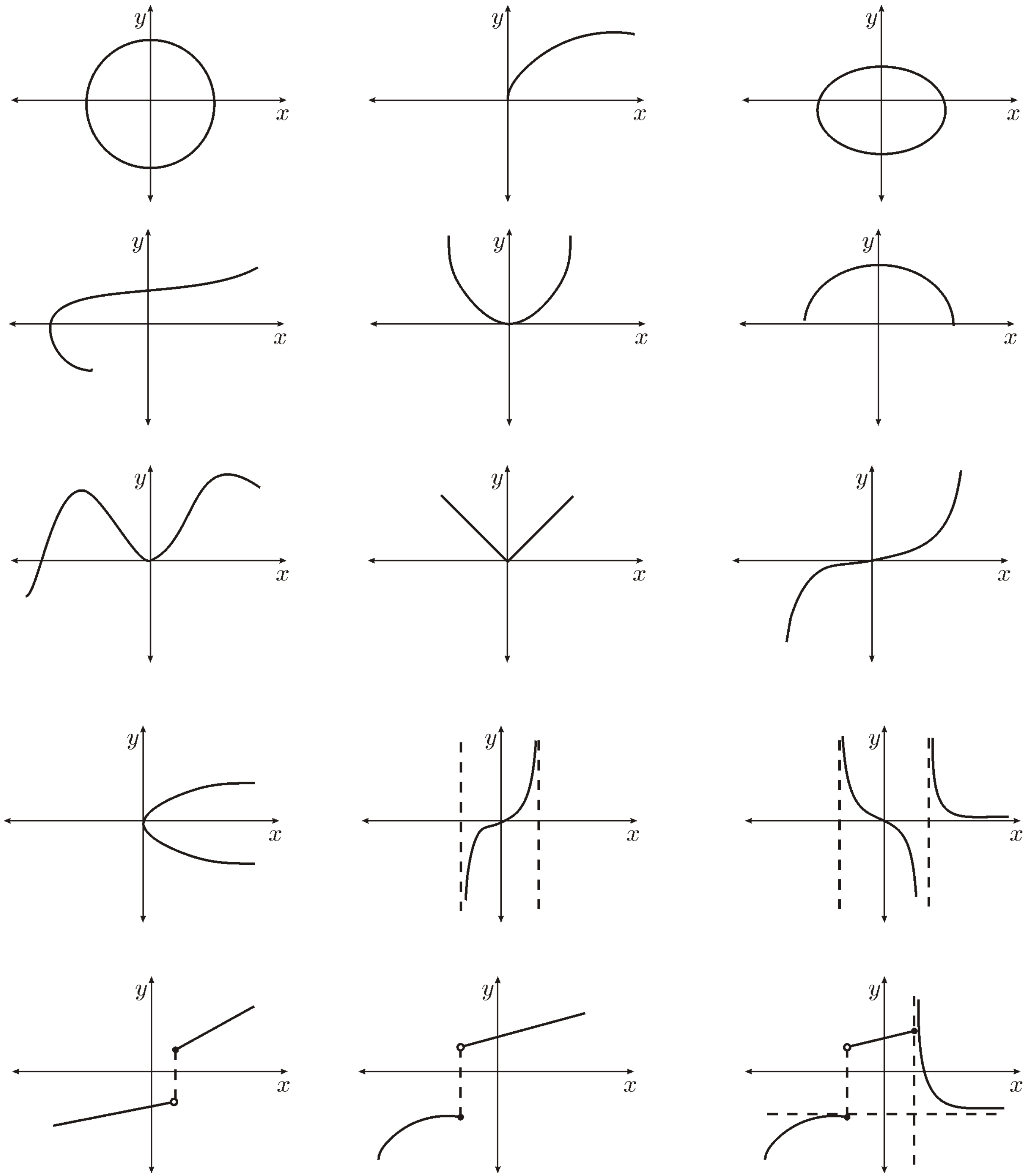
(xvi) $f(x+h)-f(x)$ $(xvii)$ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1.14.- Si $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, Hallar

(i) $f(0)$ (ii) $f(\frac{1}{4})$ (iii) $f(x^3)$ (iv) $f(-t)$ (v) $f(x+h)$

(vi) $f(x-h)$ (vii) $f(\frac{1}{t})$ $(viii)$ $f(x+1)$ (ix) $f(a-2)$ (x) $f(x+h)-f(x)$

15.- ¿Cuáles de los siguientes gráficos, son funciones?



1.16.- Hallar el dominio, rango y gráfica de las siguientes funciones:

(*i*) $f(x) = 3x - 2$ (*ii*) $f(x) = 4x + 3$ (*iii*) $f(x) = x^2 - 1$

(*iv*) $f(x) = 3x^2 - 3x + 12$ (*v*) $f(x) = x^2 - \frac{5}{2}x$ (*vi*) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

(*vii*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (*viii*) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ (*ix*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(*x*) $f(t) = \sqrt{9 - t^2}$ (*xi*) $f(x) = |x|$ (*xii*) $f(x) = |x - 3|$

(*xiii*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (*xiv*) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(*xv*) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ (*xvi*) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si } -4 \leq x < 4 \\ |x| & \text{si } x > 4 \end{cases}$

(*xvii*) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ (*xviii*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 + 15 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1.17.- Hallar los valores de a, para que $f(a) = 8$; si:

(*i*) $f(x) = 2x - 2$ (*ii*) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ (*iii*) $f(x) = x^3 - 5$ (*iv*) $f(x) = \sqrt{x^2 + 32}$

(*v*) $f(x) = \sqrt[3]{x + 64}$ (*vi*) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$

1.18.- Hallar el dominio, rango y gráfico de las siguientes funciones:

(*i*) $f(x) = |2x + 3|$ (*ii*) $f(x) = |2x - 5|$ (*iii*) $f(x) = |x - 3| + 2$

(*iv*) $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$ (*v*) $f(x) = \left|-x^2 + 2x + 4\right|$ (*vi*) $f(x) = \left|x^2 - x + 4\right| - 1$

(*vii*) $f(u) = u^3 - 2$ (*viii*) $f(t) = t^4 + 3$ (*ix*) $f(s) = \left|-s^4 + 1\right| - 2$

(*x*) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si} \quad -5 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ (*xi*) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

(*xii*) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si} \quad -\infty < x < 0 \\ x^4 + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ (*xiii*) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

$(xiv)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & \text{si}\quad x<1\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si}\quad x>1\end{cases}$ $\qquad (xv)\quad f(x)=\begin{cases}[\![x]\!] & \text{si}\quad x<0\\ x^2-1 & \text{si}\quad 0<x\leq 3\\ \frac{1}{x-3} & \text{si}\quad x>3\end{cases}$

1.19.- Hallar todas las funciones con Dominio $A=\{x,y,z\}$ y Rango $B=\{1,\ 2\}$.-

1.20.- Hallar el Dominio de las siguientes funciones:

$(i)\quad f(u)=\dfrac{1}{4u-1}$ $\qquad (ii)\quad f(x)=\sqrt{2x+3}$ $\qquad (iii)\quad f(t)=\dfrac{1}{t^2-9}$

$(iv)\quad f(s)=\sqrt{s^2-9}$ $\qquad (v)\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-9}}$ $\qquad (vi)\quad f(z)=\sqrt{\dfrac{z}{z^2-1}}$

$(vii)\quad f(t)=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-2}}$ $\qquad (viii)\quad f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x}}$ $\qquad (ix)\quad f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x+3)}$

$(x)\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+3)}}$ $\qquad (xi)\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{(2-x)(x^2-1)}{x(x+5)(x-4)}}$ $\qquad (xii)\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{x(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}}$

Parte 2.

2.1.- Si $f(x)=x^2+x$ y $g(x)=\dfrac{4}{x+3}$; hallar si es posible:

$(i)\ (f+g)(2)$ $\quad (ii)\ (f-g)(3)$ $\quad (iii)\ (f\cdot g)(\sqrt{2})$ $\quad (iv)\ (f/g)(1)$ $\quad (v)\ f^2(2)$

$(vi)\ g^2(3)$ $\quad (vii)\ (f\circ g)(\sqrt{8})$ $\quad (viii)\ (f\circ g)(0)$ $\quad (ix)\ (g\circ f)(1)$ $\quad (x)\ (g\circ f)(0)$

$(xi)\ (f\circ f)(3)$ $\quad (xii)\ (g\circ g)(3)$

2.2.- Si $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$ y $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, hallar si el posible:

$(i)\ (f+g)(3)$ $\quad (ii)\ (f-g)(2)$ $\quad (iii)\ (f\cdot g)(0)$ $\quad (iv)\ (f/g)(1)$ $\quad (v)\ f^2(0)$

$(vi)\ g^2(1)$ $\quad (vii)\ (f\circ g)(\sqrt{8})$ $\quad (viii)\ (f\circ g)(0)$ $\quad (ix)\ (g\circ f)(0)$ $\quad (x)\ (g\circ f)(1)$

$(xi)\ (g\circ g)(3)$ $\quad (xii)\ (f\circ f)(3)$

2.3.- En los siguientes ejercicios se dan las funciones f y g. Determinar en todos los casos posibles $f+g$; $f-g$; $f\cdot g$; f/g, así como el Dominio de la función resultante.

(i) $f(x)=x-4$; $g(x)=x^2-2$ $\quad$ (ii) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2+1$

(iii) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad$ (iv) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=4-x^2$

(v) $f(x)=x^3+2$; $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $\quad$ (vi) $f(x)=\sqrt{x+1}$; $g(x)=x^2-4$

(vii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ $\quad$ $g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

$(viii)$ $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x & \text{si} \quad -1<x\le 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ $\quad$ $g(x)=|x|$

(ix) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ 1-x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ $\quad$ $g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

2.4.- En los siguientes ejercicios, se dan las funciones f y g; determine, si es posibles en todos los casos, las funciones $f\circ g$; $g\circ f$; $f\circ f$; $g\circ g$; y sus dominios.

(i) $f(x)=3x$; $g(x)=x^2+1$ $\quad$ (ii) $f(x)=x-5$; $g(x)=x^2-1$

(iii) $f(x)=x^2+1$; $g(x)=3x-2$ $\quad$ (iv) $f(x)=\sqrt{x+4}$; $g(x)=x^2-4$

(v) $f(x)=\sqrt{x-4}$; $g(x)=|x|$ $\quad$ (vi) $f(x)=|x|$; $g(x)=|x-3|$

(vii) $f(x)=x^2$; $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $(viii)$ $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; $g(x)=\dfrac{2}{x}$

(ix) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

2.5.- En los siguientes ejercicios, se dan las funciones f, g, h. Determinar en todos los casos las funciones: $h\circ g\circ f$, $h\circ f\circ g$, $f\circ h\circ g$, $g\circ h\circ f$, $g\circ f\circ h$, $f\circ g\circ h$, (de ser posible); hallar el dominio de las funciones resultantes:

(i) $f(x)=x-5$, $g(x)=x^2-1$, $h(x)=\sqrt{x}$ $\quad$ (ii) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2-1$, $h(x)=4-x^2$

(iii) $f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $h(x)=x+1$ $\quad$ (iv) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$, $h(x)=2x-1$

2.6.- Dadas las funciones $(f \circ g)(x)$ y $f(x)$ hallar $g(x)$.-

(i) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9;$ $f(x) = x^2$

(ii) $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5;$ $f(x) = x^2 + 2x + 2$

(iii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1};$ $f(x) = x^2 + 1$

(iv) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2};$ $f(x) = x - 1$

2.7.- Dadas las funciones $(f \circ g)(x)$ y $g(x)$ hallar $f(x)$.-

(i) $(f \circ g)(x) = x;$ $g(x) = x^2$

(ii) $(f \circ g)(x) = 1 - x^2;$ $g(x) = x - 1$

(iii) $(f \circ g)(x) = x^2 - 1;$ $g(x) = 2x - 1$

(iv) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2};$ $f(x) = 3x + 2$

2.8.- En los siguientes ejercicios se dan las funciones f y g determinar, si es posible en todos los casos, las funciones $f \circ g$; $g \circ f$ así como su Dominio, Rango y Gráfico.

(i) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \le -1 \\ -x & \text{si } -1 < x \le 2 \\ x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = |x|$$

(iii) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(iv) $$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 1-x & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(v) $$f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } x > 5 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < -1 \\ 3x & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x^2-4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

José Luis Vásquez • Larry Mendoza • Remigio Medrano • Williams Castro • Matemática I • Guía N° I • Semestre 2016 – II

2.9.- En los siguientes ejercicios determinar si la función dada es biyectiva, en caso de serlo, hallar su inversa y el Dominio, Rango y Gráfico de la función y su inversa (graficar por separado y luego los dos gráficos en el mismo sistemas de coordenadas) si la función no es inyectiva, probar que las rectas horizontales cortan el gráfico de la función en más de un punto.

(i)	$f(x)=4$	(ii)	$g(x)=2x-3$	(iii)	$f(x)=5x-6$	(iv)	$f(x)=x^2-2$
(v)	$f(x)=3-x^2$	(vi)	$f(x)=3-x^3$	(vii)	$f(x)=x^5$	$(viii)$	$f(x)=\sqrt{x+3}$
(ix)	$f(x)=\sqrt{1-x^2}$	(x)	$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$	(xi)	$f(x)=\lvert x-2\rvert$	(xii)	$f(x)=\lvert x\rvert+x$
$(xiii)$	$f(x)=2\sqrt[3]{x}+1$	$(viii)$	$f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$	(ix)	$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$	(xiv)	$f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

2.10.- Hallar en valor de k, para que $f(x)=\dfrac{x+5}{x+k}$; sea su propia inversa.

2.11.- En los siguientes ejercicios, probar que f tiene inversa; hallar $f^{-1}(x)$ y comprobar $f^{-1}(f(x))=x$ y $f(f^{-1}(x))=x$

(i)	$f(x)=3x-1$	(ii)	$g(x)=4-\dfrac{x}{3}$	(iii)	$f(x)=\sqrt{3x+4}$	(iv)	$f(x)=\dfrac{1}{x-5}$
(v)	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$	(vi)	$f(x)=(x-2)^3$	(vii)	$f(x)=x^{3/2};\ x\geq 0$	$(viii)$	$f(x)=\dfrac{2x-2}{x+3}$
(ix)	$f(x)=\dfrac{3x+2}{2x+1}$	(x)	$f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+2}$	(xi)	$f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^3$		

2.12.- Probar que las siguientes funciones no son biyectivas, restringir su Dominio y Rango (si es necesario), para que lo sean; hallar $f^{-1}(x)$.-

(i)	$f(x)=x^2+4$	(ii)	$f(x)=2x^2-6$	(iii)	$f(x)=\sqrt{9-x^2}$	(iv)	$f(x)=2x^2+x-3$
(v)	$f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$	(vi)	$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$	(vii)	$f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$	$(viii)$	

(ix) $g(x)=\begin{cases} x & si\ \ x<1 \\ x^2 & si\ \ 1\leq x\leq 9 \\ 27\sqrt{x} & \text{si}\ \ x>9 \end{cases}$

2.13.- En los siguientes ejercicios determinar si las funciones dadas, son pares, impares, ó ninguna de los dos caso:

(i) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ (ii) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 2$ (iii) $f(x) = 5x^3 - 7x$ (iv) $h(u) = u^2 + 3u - 3$

(v) $g(t) = t^6 - 1$ (vi) $h(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$ (vii) $f(s) = \dfrac{s - 1}{s + 1}$ $(viii)$ $h(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$

(ix) $h(u) = \dfrac{|u|}{u^2 + 1}$ (x) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (xi)

(ix) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2.14.- Demostrar que si f y g son funciones impares entonces:

(i) $f + g$ y $f - g$ son funciones impares.- (ii) $f \cdot g$ y f/g son funciones pares.-

2.15.- Si f y g son pares, como se comporta su suma y su producto.-

2.16.- ¿Como será la función compuesta $f \circ g$ (par o impar) en cada uno de los siguientes casos?

(i) Si f y g son ambas pares. (ii) Si f y g son ambas impares.

(iii) Si f es par y g es impar. (iv) Si f es impar y g es par.

2.17.- Expresar cada una de las funciones siguientes como suma de una función par y otra impar:

(i) $f(x) = 2x - 5$ (ii) $f(x) = x^2 + 2$ (iii) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ (iv) $f(x) = 8x^3 + 1$

(v) $f(x) = x^4 + x^3 - x + 3$ (vi) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (vii) $f(x) = |x| + |x - 1|$ $(viii)$ $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 1}$

2.18.- Determinar si las siguientes funciones, son crecientes, decrecientes o ambas casos:

(i) $f(x) = 2x - 1$ (ii) $f(x) = -x + 2$ (iii) $f(x) = x^2$ (iv) $f(x) = x^2 + 1$

2.19.- Dada las ecuaciones canónicas de las siguientes cónicas, hallar las funciones $y_1 = f_1(x)$ y $y_2 = f_2(x)$ que derivan de ellas así como su dominio, rango y gráfico de las misma:

(i) $x^2 + y^2 = 4$ (ii) $y^2 = 16x$ (iii) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

(iv) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ (v) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ (vi) $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{4} = 1$

(vii) $4(x+3) = (y+2)^2$ $(viii)$ $\dfrac{(x+3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

2.20.- Dadas las ecuaciones Cartesianas de las siguientes cónicas, hallar las funciones y_1, y_2, derivadas de ellas así como su Dominio, Rango y Gráfico (aquí se sugiere hacer completación de cuadrados).

(i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ (ii) $y^2 - 4x - 12y + 28 = 0$

(iii) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 72y + 124 = 0$ (iv) $25x^2 - 4y^2 + 150x - 8y + 129 = 0$

Parte 3.

3.1.- Hallar el equivalente en radianes de los siguientes ángulos sexagesimal:

(i) $30°$; (ii) $-75°$; (iii) $135°$; (iv) $210°$; (v) $240°$; (vi) $330°$;

3.2.- Hallar el equivalente en ángulos sexagesimales de los siguientes radianes:

(i) $\frac{\pi}{3}$rad; (ii) $-\frac{\pi}{6}$rad; (iii) $-\frac{\pi}{4}$rad; (iv) $-\frac{\pi}{2}$rad; (v) $\frac{3\pi}{4}$rad; (vi) $\frac{11}{6}\pi$rad;

3.3.- Dadas las siguientes funciones $f(x) = e^{2x} - 1$; $g(x) = \ln(x-2) + 3$; y $h(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$, hallar las siguientes imágenes:

(i) $f(0)$; $f(-1)$; $f(3)$; $f(\sqrt{3})$; $f(h)$; $f(x+h)$;

(ii) $g(1)$; $g(3)$; $g(5)$; $f(h)$; $f(x+h)$; $g(x+h) - g(x)$;

(iii) $h(0)$; $h(\pi)$; $h(\frac{\pi}{2})$; $h(2\pi)$; $h(\frac{3\pi}{2})$; $h(x+c)$; ;
(iv) , ,;

3.4.- Hallar los valores x, para los que:

(i) $\operatorname{sen} x = 1$ (ii) $\cos x = -1$

3.5.- Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

(i)	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$	(ii)	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
(iii)	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$	(iv)	$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$
(v)	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$	(vi)	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
(vii)	$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;	$(viii)$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

3.6.- Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

(i) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$; (ii) $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$; (iii) $\tan(x + \pi) = \tan x.$

3.7.- Demostrar las siguientes identidades hiperbólicas:

(i)	$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$;	(ii)	$1 - \operatorname{cotanh}^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$
(iii)	$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} h$	(iv)	$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
(v)	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$	(vi)	$\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$

3.8.- Dadas las siguientes funciones, decir cuales son pares, impares y cuales no lo son:

(i) $y = \operatorname{sen} x$ (ii) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ (iii) $y = \tan x$ (iv) $y = 2^{-x^2}$

(v) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ (vi) $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

3.9.- ¿Cuales de las siguientes funciones son periódicas?

(i) $y = 1 + \operatorname{tang} x$; (ii) $y = |\operatorname{sen} x| + |\cos x|$; (iii) $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$ (iv) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$

3.10.- Hallar el Dominio de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x-2)}$ $\quad(ii)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(1-x)}}$ $\quad(iii)$ $f(x) = \sqrt{-\cos(x+1)}$

(iv) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x-1}{2}\right)$ $\quad(v)$ $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ $\quad(vi)$ $f(x) = 1 - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(vii) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{16-x^2} - \operatorname{arc\,sen}(x-2)$ $\quad(viii)$ $f(x) = \log(x+2) + \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} + \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(ix) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\log\frac{x}{10}\right)$ $\quad(x)$ $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

(xi) $f(x) = \dfrac{1}{2^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}}$ $\quad(xii)$ $f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(\frac{x^2-2x-2}{x+2}\right)}$

3.11.- Hallar el Dominio, Rango y Gráfico de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \operatorname{sen} x + 1$ $\quad(ii)$ $f(x) = -3 + \cosh x$ $\quad(iii)$ $f(x) = \ln(-x)$

(iv) $f(x) = |\ln(x-1)|$ $\quad(v)$ $f(x) = \ln|x|$ $\quad(vi)$ $f(x) = e^{-x}$

(vii) $f(x) = e^{x+1}$ $\quad(viii)$ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$ $\quad(ix)$ $f(x) = |2^x - 1|$

(x) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{x}\right)^x - 5\right|$ $\quad(xi)$ $f(x) = |2^x - 2| + 1$ $\quad(xii)$ $f(x) = \left|e^{x+1} - 3\right| - 1$

3.12.- Hallar el Dominio, Rango y Gráfico de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = 1 + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(x+2)$ $\quad(ii)$ $f(x) = 2 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(x-2)$ $\quad(iii)$ $f(x) = -1 + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(x-1)$

(iv) $f(x) = 1 - 2\cos\frac{\pi}{4}(x-4)$ $\quad(v)$ $f(x) = -3 + 2\cos\frac{\pi}{2}(x+2)$ $\quad(vi)$ $f(x) = 1 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(x-2)$

(vii) $f(x) = \ln(x-2)$ $\quad(viii)$ $f(x) = \log|x| - 2$ $\quad(ix)$ $f(x) = |\log_2(x-1)| - 1$

(x) $f(x) = |\log_3(x-2) + 3| - 2$ $\quad(xi)$ $f(x) = -2^x$ $\quad(xii)$ $f(x) = 1 - 3^x$

$(xiii)$ $f(x) = 2^{-x^2}$ $\quad(iv)$ $f(x) = -|\log(1-2x)| + 3$

3.13.- Hallar, si es posible, el Dominio, para que tenga inversa, las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3x-1}{2}\right)$	(ii) $f(x) = \cos\left(\frac{2x-1}{2}\right)$	(iii) $f(x) = 2 + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(x+2)$
(iv) $f(x) = 2 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(2x-1)$	(v) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{4}\right)$	(vi) $f(x) = 3 + 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-1}{x}\right)$
(vii) $f(x) = 1 + \tanh^{-1}\left(\frac{x-2}{4}\right)$	$(viii)$ $f(x) = 1 + \log(x+1)$	(ix) $f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$
(x) $y = 2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}$	(xi) $y = 2 - \log\left(\frac{x-1}{x}\right)$	(xii) $y = \ln\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$

3.14.- Hallar la inversa (si es posible), de las funciones del ejercicio 13(anterior).

3.15.- Dada las siguientes funciones hallar, cuando sea posible las funciones: $f+g$; $f-g$; $f\cdot g$; f/g; $f\circ g$ y $g\circ f$.

(i) $f(x) = 1 - x^2$; $g(x) = \operatorname{sen} x$;	(ii) $f(x) = x+1$; $g(x) = \cos x$
(iii) $f(x) = 1 + x^2$; $g(x) = \tan x$	(iv) $f(x) = x+1$; $g(x) = \cosh x$
(v) $f(x) = x^2$; $g(x) = e^x$	(vi) $f(x) = x-1$; $g(x) = \ln x$

(vii) $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 1+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$(viii)$ $$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ e^x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < -1 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$